



**INIDEP**

INSTITUTO NACIONAL DE INVESTIGACIÓN  
Y DESARROLLO PESQUERO

# INFORME DE INVESTIGACIÓN

Número	Páginas	Fecha de aprobación
086	06	09 de Noviembre de 2020
Dirección		
DIRECCIÓN DE PESQUERIAS DE PECES		
Programa / Gabinete		
Gabinete de Biomatemática		
Actividad		
GMAT LT2/LT3/Lt4		

## OBJETIVO DE MÁXIMA CAPTURA SOSTENIBLE, EN MODELOS DE DINÁMICA DE BIOMASA CON PRODUCCIÓN EXCEDENTE CUADRÁTICA

El concepto de captura máxima sostenible proviene del modelo de producción excedente cuadrático de biomasa, y de acuerdo al mismo es la máxima producción excedente que se da en una determinada biomasa, denominada biomasa óptima. Se pueden desarrollar planes de manejo para que la biomasa poblacional sea similar a esta biomasa óptima, logrando así la posibilidad de capturar buenas capturas, de manera sostenible. Pero no es posible utilizar a la captura máxima sostenible como referencia y objetivo a capturar de manera constante. En el caso de capturar la máxima producción excedente de manera constante en el tiempo, se generará un estado de equilibrio de biomasa inestable, y salvo que la biomasa sea la biomasa óptima, la misma decrecerá a cero cuando el tiempo pase (colapso biológico y pesquero). Entonces, en la búsqueda de una "captura máxima sostenible", en este trabajo, se plantea un criterio que contempla la incertidumbre, para determinar una captura sub-óptima pero próxima a la captura máxima sostenible del modelo de producción excedente cuadrático, y que realmente sea sostenible en el tiempo, con gran probabilidad. Se define conjunto de referencia biológico objetivo y excluyente.

Citar Indicando la fuente. El contenido no debe ser reproducido total o parcialmente sin la expresa conformidad del INIDEP

<b>SOLICITADO POR</b>	Institución	Cargo

**PREPARADO POR**

Firma:

Nombre: AUBONE, ANIBAL

**APROBADO POR**

Jefe de Programa / Gabinete

Director de área

Dra. CLAUDIA RAQUEL CAROZZA  
DIRECCIÓN NACIONAL INVESTIGACIÓN  
INIDEP

Director Nacional de Investigación

Director del INIDEP





# Objetivo de máxima captura sostenible, en modelos de dinámica de biomasa con producción excedente cuadrática

Aníbal Aubone

Gabinete de Biomatemática, Instituto Nacional de Investigación y Desarrollo Pesquero

CEMIM (Centro Marplatense de Investigaciones Matemáticas), Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Mar del Plata

---

## 1. Introducción

Los modelos de producción excedente de biomasa son suficientemente sencillos para ser aplicados en situaciones de pocos datos disponibles. Los modelos de producción excedente de biomasa tienen propiedades que son suficientemente ricas en resultados interesantes para el manejo pesquero y para determinar la dinámica a largo plazo de la biomasa, con fines de sostenibilidad biológica. Los estados de equilibrio deben pensarse en una dinámica a largo plazo, y reflejan situaciones de sostenibilidad biológica, si son no nulos.

Un objetivo común en toda pesquería es llegar a plantear una captura que pueda ser sostenible en el tiempo (biológicamente sostenible), considerando la incertidumbre subyacente, y que sea de alguna manera máxima.

Sin embargo, la idea de sostenibilidad de la captura, cuando se trata de modelo de producción excedente de biomasa, conlleva la idea de estados de equilibrios, con captura constante. Lo importante es poder estudiar la propiedad de estabilidad de cada estado de equilibrio, que indica que ocurrirá en proximidades del mismo, en el largo plazo.

La tendencia a cero de la biomasa es una propiedad matemática, deducida del modelo considerado. En términos prácticos, puede pensarse que, cuando la biomasa tiende a valores tan pequeños con el paso del tiempo, la explotación en algún momento, será comercialmente inviable, y se dejará de capturar con dicha captura constante. Por eso, en términos prácticos, puede pensarse más bien en un colapso pesquero o colapso biológico, más que la extinción. Esto, puede pensarse en general, pues para ciertas especies (algunos condricios, por ejemplo) puede ocurrir que exista un umbral de biomasa poblacional, pequeña, que sobrepasado realmente produzca inevitablemente la extinción poblacional.

## 2. Metodología

Tradicionalmente la captura máxima sostenible (*CMS*) (o Rendimiento Máximo Sostenible: *RMS*) se calcula a partir de un modelo de producción excedente cuadrático de biomasa.



El modelo de producción excedente cuadrático de biomasa a saber es:

$$B_{t+1} = B_t + r \left(1 - \frac{B_t}{K}\right) B_t - C_t$$

$$r, K > 0; B_0 = B_{t_0} > 0$$

$$\forall t: B_t \geq 0$$

$$0 < r < 2$$

$$Y B_{MSY} = B_{opt} = \frac{K}{2}; CMS = \frac{rK}{4}.$$

Sólo puede obtenerse la *CMS* cuando la biomasa es  $B_{opt}$ . La captura máxima sostenible definida aquí es la máxima producción excedente.

En algunas situaciones, es posible que los datos no permitan estimar los parámetros de un modelo de producción excedente de biomasa, por falta de contraste entre el índice de abundancia y la captura (Aubone, 2017). Esto no es indicador de que el modelo de producción excedente cuadrático no sea válido para la población en estudio. Simplemente no hay contraste suficiente, con los datos disponibles. En ese caso, tal vez el planteo de una producción excedente de función lineal, sea conveniente. Una producción excedente que sea una función cuadrática de la biomasa, asume que a pequeñas biomasa la producción excedente es pequeña y alcanza un máximo, para luego decrecer, pudiendo tomar un valor negativo a biomasa grandes. Esto indica un efecto denso dependiente de la producción excedente. La aplicación de un modelo de este tipo requiere de validar el fenómeno biológico, antes de la modelización.

Un Punto Biológico de Referencia (PBR) es un valor de referencia de una variable biológica o pesquera, con sentido de sostenibilidad biológica. Por lo tanto, una vez definida la variable se debe calcular el valor de referencia. Este es un valor constante y no aleatorio, por más que se haya estimado. Define un PBR Objetivo (PBRO) un objetivo a lograr para la variable, o define un umbral a no pasar (PBR Límite o PBRL), para la misma.

La evaluación de incertidumbre o estimación del riesgo debe realizarse en función de este PBR, considerando la incertidumbre en todos los factores posibles, contemplados en la estimación de los parámetros del modelo matemático. El riesgo es la probabilidad de que ocurra algo considerado "malo".

La captura constante en un modelo de producción excedente de biomasa permite que sucedan tres posibles casos de estados de equilibrio, dependiendo de la magnitud de dicha captura (Aubone, 2010). Si la captura  $C$  es tal que  $C < rK/4$  entonces existen dos estados de equilibrio: el menor inestable y umbral de extinción, y el mayor de los dos, asintóticamente estable (si  $0 < r < 2$ ). Si la captura  $C$  es tal que  $C = rK/4$ , existe un solo estado de equilibrio, inestable, y salvo que la biomasa poblacional sea la biomasa de equilibrio  $B_{opt} = K/2$  (donde se da la máxima producción excedente:  $C = rK/4$ ) en algún tiempo, la biomasa tiende a cero cuando el tiempo pasa. Si  $C > rK/4$ , no existen estados de equilibrio y la biomasa tiende a cero cuando el tiempo pasa.



Así, la captura constante debe estar convenientemente acotada para facilitar la dinámica biológicamente sostenible ( $C < rK/4$ ).

Pero, surge un problema: capturar constantemente la máxima producción excedente puede llevar (casi con seguridad) a la teórica extinción poblacional. Esta máxima producción excedente es la denominada "Captura Máxima Sostenible" o "Rendimiento Máximo Sostenible". Como se discutió anteriormente, no es realmente sostenible.

Si se acepta que en el mundo real, marino, es imposible que la biomasa se mantenga constante, podemos imaginar que manteniendo la captura en  $C = \frac{rK}{4} = CMS$ , en todos los tiempos, cuando  $B_t \neq B_{opt}$ , la producción excedente será menor que dicha captura y la biomasa disminuirá. Esto, en el tiempo, producirá la extinción poblacional de manera inevitable. Cuando se busca la máxima captura sostenible, suele referirse a este concepto de máxima producción excedente de biomasa. Sin embargo, por lo visto, se observa que dicha captura  $C = \frac{rK}{4} = CMS$ , no es realmente biológicamente sostenible. Entonces es necesario definir un criterio que permita de alguna manera capturar mucho, pero con sentido de sostenibilidad biológica.

Por ejemplo, si se considera una estrategia de captura constante, es necesario que la captura  $C$  verifique  $C < \frac{rK}{4}$ , para que existan dos estados de equilibrio, uno denominado umbral de extinción  $B_*$  (posible PBRL, menor a  $B_{opt}$ ) y otro mayor a  $B_{opt}$ , equilibrio asintóticamente estable  $B_{**}$  (posible PBRO). La biomasa óptima es el promedio de estos dos estados de equilibrio. Estos estados de equilibrio dependen de los parámetros del modelo, que se estiman. Además dependen del valor de  $C > 0$ , que es constante. Así que existirá cierta incertidumbre en los valores de los estados de equilibrio.

Se puede notar que la dinámica de biomasa a largo plazo va a estar determinada por estos estados de equilibrio y por la biomasa actual. Por lo tanto, no es posible fijar un PBRO que no sea  $B_{**}$ .

En cuanto a un PBRL sí es posible definir un valor mayor a  $B_*$ , pero no menor a este.

La dinámica asintótica hará que la biomasa se aproxime al estado de equilibrio  $B_{**}$  cuando el tiempo pase si  $B_{actual} > B_*$ , y hará tender a cero a la biomasa si  $B_{actual} < B_*$  (Aubone, 2010).

Si  $C$  es próximo a  $CMS = \frac{rK}{4}$  los estados de equilibrio  $B_*, B_{**}$  se parecen. Y cuanto más similar sea la captura a la captura máxima sostenible, mayor similitud tendrán los estados de equilibrio. El extremo se da cuando  $C = \frac{rK}{4}$ , en cuyo caso  $B_* = B_{**} = B_{opt}$ , es el estado de equilibrio.

Teniendo en cuenta la incertidumbre, puede ocurrir en la realidad, que no existan dos estados de equilibrio o que exista uno solo (estos dos casos producen el colapso biológico en el largo plazo). Por ello, teniendo en cuenta la incertidumbre, debería adecuarse la captura (el control de la explotación, en este caso) para dar cierta certeza de la existencia de dos estados de equilibrio y que la biomasa actual sea mayor que el menor de ellos, considerado umbral de extinción. Esta es la estrategia básica de explotación biológicamente sostenible.

Considerando la incertidumbre, puede ocurrir que con el valor de  $C$  la probabilidad que no existan estados de equilibrio (en este caso es segura la extinción a largo plazo) o sean iguales (casi seguro la extinción a largo plazo), sea grande.



Para salir de este problema, una opción es considerar la captura  $C$  de manera (Aubone, 2020):

a) Si  $\Pr(B_{actual} > B_{opt}) = \gamma$ , con  $\gamma$  cercano a 1, entonces basta elegir la captura tal que  $\Pr(C < CMS) = \beta$ , con  $\beta$  cercano a 1.

b) Si  $\Pr(B_{actual} < B_{opt}) = \gamma$ , con  $\gamma$  cercano a 1, hay que asegurar que  $\Pr(C < CMS) = \beta$  y que  $\Pr\left(r\left(1 - \frac{B_{actual}}{K}\right)B_{actual} > C\right) = \delta$ , con  $\delta$  cercano a 1.

Esta segunda condición dice que la producción excedente actual debe ser mayor que la captura propuesta  $C$ , con gran probabilidad.

De esta forma, se asegura con gran probabilidad ( $\beta$  grande) la existencia de dos estados de equilibrio, y con gran probabilidad que la captura elegida sea biológicamente sostenible ( $\delta$  grande).

Los valores de  $\gamma, \delta, \beta$  pueden ser elegidos, por ejemplo, mayores que 0,9.

Una vez elegida la captura  $C$ , puede considerarse la distribución de frecuencias relativas del estado de equilibrio  $B_{**}(C)$ , y considerar un intervalo centrado en la moda o la mediana, como intervalo al que se desea llegar con la biomasa poblacional. Dicho intervalo debiera contener a  $B_{**}$  con gran probabilidad (objetivo ligado a un intervalo para la variable de referencia).

Aubone (2020) define lo que sería un conjunto de valores de referencia biológico:

*Definición de CRB (Conjunto de Referencia Biológico): es un conjunto de valores de una variable de referencia, en general biológica o pesquera, ligada a la sostenibilidad biológica.*

*Un CRBO (CRB Objetivo) es un CRB, donde el objetivo es que la variable de referencia tome valores en dicho conjunto.*

*Un CRBE (CRB Excluyente) es un CRB, donde el objetivo es que la variable de referencia no tome valores en dicho conjunto.*

Notar que estas definiciones son generalizaciones de la definición de PBR, PBRO y PBRL. La idea es estimar la probabilidad de que la variable de referencia en un tiempo tome un valor en el conjunto de referencia CRBO, y ésta sea una medida de cumplimiento del objetivo. Análogo puede hacerse para el CRBE, obteniendo una probabilidad (llamado riesgo) de que la variable de referencia tome un valor en dicho conjunto excluyente.

Formalizando esto, para el caso del modelo de producción excedente de biomasa, se podría considerar por ejemplo, el percentil 90 ( $p_{90,B_*}$ ) de la distribución de frecuencias relativas de  $B_*$  y por ejemplo, los percentiles 25 y 75 ( $p_{25,B_{**}}; p_{75,B_{**}}$ ) de la distribución de frecuencias relativas de  $B_{**}$ . Para luego estimar  $\Pr(B_t < p_{90,B_*})$  (considerada riesgo de extinción para el tiempo  $t$ ) (probabilidad de que la variable de referencia tome un valor en el CRBE), y  $\Pr(B_t \in (p_{15,B_{**}}, p_{75,B_{**}}))$  probabilidad de alcanzar el CRBO, en el tiempo  $t$  de proyección (o diagnóstico).



Debería verificarse que  $p_{90,B} < p_{25,B^{**}}$  para separar bien los intervalos, de lo contrario, cambiar alguno de los percentiles. Esta separación de los intervalos separa los estados de equilibrio, limitando la similitud de la captura con la *CMS*.

Observar que  $\Pr(B_t < p_{90,B})$  es un riesgo relativo a  $B_*$  y que  $1 - \Pr(B_t \in (p_{15,B^{**}}, p_{75,B^{**}}))$  es otro riesgo relativo a  $B^{**}$ .

En este proceso podría calcularse el tiempo que llevaría alcanzar el entorno del PBRO, considerando que dicho entorno se alcanza cuando  $\Pr(B_t \in (p_{15,B^{**}}, p_{75,B^{**}}))$  es convenientemente grande. La idea de abrir un intervalo centrado en la mediana surge de pensar que la distribución de frecuencias relativas de  $B^{**}$  tiene a la mediana como valor próximo a la moda. Esto debiera verificarse. Se recomienda analizar la distribución de frecuencias relativas de  $B^{**}$  y obrar en consecuencia.

## Comentarios

En una explotación biológicamente sostenible, el objetivo es la búsqueda de una captura constante (actúa como control de la explotación), que sea la máxima posible, en el ambiente de incertidumbre de los parámetros del modelo, para lograr con gran probabilidad que la biomasa poblacional evolucione en el tiempo hacia un entorno de un estado de equilibrio (en realidad desconocido por la incertidumbre) asintóticamente estable (si  $0 < r < 2$ ).

Notar que, considerando la incertidumbre, aunque se desconoce el estado de equilibrio al que la biomasa se aproximaría, sí se cuenta con la distribución de frecuencias relativas estimada de dicho estado de equilibrio, lo que permite determinar un intervalo de biomasa que lo contenga con gran probabilidad. En este caso, la definición de un conjunto (intervalo) de referencia biológico, sería lo más conveniente.

La estrategia que se presenta en este trabajo permite obtener una captura máxima sostenible condicionada a un ambiente de incertidumbre y la validez del modelo de producción excedente cuadrático de biomasa. Esta captura máxima sostenible no es la máxima producción excedente, es un poco menor, pero satisface medidas de seguridad biológica, al considerar pequeño riesgo de colapso biológico a largo plazo, con una dinámica asintótica que puede preverse. Esto brinda herramientas para monitorear la dinámica y realizar correcciones si fuera necesario.

## Referencias

- Aubone, A. 2020 (MS). Notas de Matemática Pesquera. *Libro en edición final*. 26/08/2020.
- Aubone, A. 2017. Contraste necesario para estimar los parámetros de un modelo de producción excedente de biomasa. Informe de Investigación INIDEP N°01/18, presentado el 23/10/17 a la Dirección del INIDEP.
- Aubone, A. 2010. Modelos Discretos de Dinámica de Poblaciones de Peces Explotadas. Editorial Martín, 305 p.