Revista de Investigación y Desarrollo Pesquero

Volumen 2 — N° 2 — Setiembre 1980

Director: Cap. de Navío (RE) Alberto Oscar CASELLAS

NOTA SOBRE LA CONSIDERACION DE RETARDOS EN UN MODELO DE PESQUERIAS

por
Carlos Enrique D'Attellis *

ABSTRACT

In the application of some techniques for the estimation and the regulation of fishery models with delays, it is necessary to have a validated linear model. In this note, we construct such a linear model using the Paynter approximation for delays.

Entre los modelos matemáticos que se utilizan para diseñar políticas de manejo de pesquerías, figuran los llamados "simples", que hacen uso solamente de los datos de captura y esfuerzo pesquero. En tal categoría podemos ubicar los modelos de Schaefer [1], Pella y Tomlinson [2] y Fox [3].

Esta simplicidad trae aparejados ciertos inconvenientes, puntualizados algunos de ellos por Silliman [4], entre los que figura el siguiente: el tiempo de retardo entre el desove y el reclutamiento no tiene efecto apreciable en la población. De allí la importancia de considerar retardos en los modelos que describen su comportamiento.

El estudio de ecuaciones diferenciales correspondientes a modelos que involucran retardos puede encontrarse, por ejemplo, en los trabajos de Wright ([5] y [6]), Kakutani y Markus [7], Jones [8], Kaplan y Yorke [9] y Clark [10]; específicamente sobre modelos pesqueros en el de Walter [11].

Este último autor introduce retardos en las ecuaciones para conseguir una variación en el comportamiento monótono, y por lo tanto irreal, de la biomasa en los modelos de Schaefer, Pella y Tomlinson, y Fox, anteriormente citados.

Con el objeto de lograr una descripción más realista D'Attellis y Gregorio ([12] y [13]) introdujeron un modelo estocástico derivado del de Schaefer, y utilizaron métodos de estimación y regulación óptimas para calcular los parámetros del modelo y el esfuerzo pesquero; tales métodos no pueden ser aplicados en forma directa si los modelos contienen retardos.

Sin embargo se pueden modificar las ecuaciones de tal manera que no aparezcan explícitamente los tiempos de retardo.

Lo haremos siguiendo el camino que hemos recorrido para obtener el modelo estocástico a partir del de Schaefer en las referencias 12 y 13, pero agregando una modificación: después de linealizar la ecuación, utilizaremos la aproximación de Paynter para los retardos, que los elimina a cambio de aumentar el número de ecuaciones del modelo, y que resulta suficientemente buena para el problema considerado.

Este método para tratar ecuaciones con retardos fue utilizado en otros problemas (Cf. [14]) y difiere del de la ref. 11.

El modelo de Schaefer es el siguiente:

$$p(t) = b\,p(t) - a\,p^2(t) - q\,f(t)\,p(t)$$

donde p(t) es la biomasa, f(t) el esfuerzo pesquero, las constantes b y a son las tasas de crecimiento y de mortalidad respectivamente, y q el coeficiente de capturabilidad.

* Instituto Argentino de Matemática.

De la introducción de un retardo en la ecuación anterior resulta.

$$\dot{p}(t) = G(p(t), p(t-\mu), f(t)) = \\ = b\,p(t) - a_1 p^2(t) - a_2 p(t)\,p(t-\tau) - \\ - q\,f(t)\,p(t)$$

Diremos que (f^o, p^o) es un punto de equilibrio de esta ecuación si a la excitación constante f^o le corresponde una respuesta constante p^o.

Esto significa un estado estacionario constante, de manera que $\dot{p}(t) = 0$ para todo t. En consecuencia el punto será de equilibrio si (Cf. [17] para otro tipo de equilibrio)

$$G(f^\circ, p^\circ) = 0,$$

o sea,

$$b - a\,p^\circ - q\,f^\circ = 0,$$

donde

$$a = a_1 - a_2.$$

Dado que el modelo es usado en un entorno del punto de equilibrio (Cf. [12] y [13], llamando

$$x(t) = p(t) - p^\circ$$
$$u(t) = f(t) - f^\circ,$$

resulta

$$\dot{x}(t) = A_1\,x(t) + A_2\,x(t-\tau) + B\,u(t),$$

donde

$$A_1 = \left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{(f^\circ,p^\circ)}, \quad A_2 = \left.\frac{\partial G}{\partial p(t-\tau)}\right|, \quad B = \left.\frac{\partial G}{\partial f}\right|_{(f^\circ,p^\circ)}$$

Utilizaremos en lo que sigue la ecuación anterior con los siguientes parámetros

$$\dot{p}(t) = p(t) - 0{,}015\,p^2(t) + 0{,}005\,p(t) \\ p(t-1) - 0{,}1\,f(t)\,p(t), \qquad (1)$$

y el estado de equilibrio

$$f^\circ = 5, \quad p^\circ = 50.$$

De la linealización resulta

$$\dot{x}(t) = -0{,}75\,x(t) + 0{,}25\,x(t-1) - 5\,u(t). \quad (2)$$

Un retardo τ es representado, transformando Laplace, por la exponencial exp($-\tau$ s); una aproximación al mismo es la de Paynter (Cf. [15], [16]), basada en la expresión

$$e^{-\tau s} = (\cosh \tau\,s + \operatorname{senh} \tau s)^{-1}.$$

Si reemplazamos las funciones hiperbólicas por sus desarrollos en productos, y usamos los primeros n términos, obtenemos

$$e^{-\tau s} \simeq (a_n (\tau s)^n + \ldots + \tau s + 1)^{-1}.$$

De la selección de n depende la exactitud de la aproximación.

Por ejemplo, la representación de tercer orden es

$$e^{-\tau s} \cong \left(\frac{1}{\pi^2}(\tau s)^3 + \frac{4}{\pi^2}(\tau s)^2 + \tau s + 1\right)^{-1}. \quad (3)$$

Indicando la transformación de Laplace con £ , tenemos

$$£\,[x(t-\tau)] = e^{-\tau s} \quad £\,[x(t)] \cong \quad Y(s)$$

donde Y(s) es el término anterior con la exponencial reemplazada por la aproximación (3).

Entonces, llamando X(s) = £ [x(t)],

$$\frac{1}{\pi^2}(\tau s)^3\,Y(s) + \frac{4}{\pi^2}(\tau s)^2\,Y(s) + \tau s\,Y(s) + Y(s) = X(s);$$

en la variable tiempo, es decir, antitransformando, es una ecuación diferencial de tercer orden, que escrita como sistema de ecuaciones de primer orden junto a (1), resulta

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -0{,}75\,x_1 + 0{,}25\,x_2 - 5\,u \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= 9{,}8716\,x_1 - 9{,}8716\,x_2 - 9{,}8716\,x_3 - 4{,}0009\,x_4; \quad (4) \end{aligned}$$

los coeficientes fueron calculados para $\tau = 1$ como figura en la ecuación (1), y las condiciones iniciales para y(t) y sus derivadas son nulas.

La tabla 1 muestra los resultados obtenidos con el modelo real y las aproximaciones de primer y tercer orden para el retardo $\tau = 1$, con una variación de esfuerzo pesquero de 0,1 para $t \geqslant 0$. Para la solución numérica de la ecuación (2) se tomó un intervalo de cálculo de 0,01, manteniendo los datos de

100 puntos en cada intervalo para usar el retardo $\tau = 1$.

La [illegible]ación anterior es a lazo,abierto, es decir, muestra la aproximación obtenida en x(t) cuando se usa el u(t) que indicamos. Sin embargo, al emplear los métodos indicados en las referencias 12 y 13, la decisión sobre el esfuerzo pesquero u(t) se toma en función de la biomasa x(t); en la Tabla 2 se muestran los resultados obtenidos en una regulación al estado de equilibio de la biomasa, suponiendo una desviación inicial del 7 %, y usando el modelo real y el aproximado de tercer orden cuando el coeficiente de realimentación es la unidad.

Ambas tablas muestran que la sustitución de los retardos por las ecuaciones diferenciales obtenidas, da una aproximación de suficiente exactitud.

De la ecuación diferencial lineal con retardos (2) obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales lineales (4), y sobre él se pueden aplicar las técnicas empleadas en las referencias 12 y 13, construyendo un modelo discreto y estocástico; luego se pueden resolver los problemas planteados en esas referencias: regulación dinámica de la biomasa, cálculo de la captura máxima sostenible, estimación de los parámetros del modelo.

Observemos finalmente que los parámetros del sistema de ecuaciones (4) que corresponden a la aproximación efectuada, dependen solamente de τ; entonces los programas computacionales desarrollados para resolver los problemas de estimación de parámetros (Cf. [12] y [13]), pueden usarse sin modificaciones.

t	Modelo Real	Aproximación de 1er. orden	Aproximación de 3er. orden
0, 2	-0, 0931	-0, 0962	-0, 0928
0, 4	-0, 1733	-0, 1790	-0, 1728
0, 6	-0, 2423	-0, 2511	-0, 2420
0, 8	-0, 3016	-0, 3144	-0, 3023
1, 0	-0, 3526	-0, 3706	-0, 3555
1, 2	-0, 3987	-0, 4208	-0, 4032
1, 4	-0, 4423	-0, 4659	-0, 4465
1, 6	-0, 4834	-0, 5068	-0, 4865
1, 8	-0, 5217	-0, 5440	-0, 5235
2, 0	-0, 5572	-0, 5779	-0, 5581
2, 2	-0, 5899	-0, 6090	-0, 5904
2, 4	-0, 6202	-0, 6376	-0, 6205
2, 6	-0, 6483	-0, 6639	-0, 6485
2, 8	-0, 6743	-0, 6881	-0, 6745
3, 0	-0, 6983	-0, 7105	-0, 6986

t	Modelo Real	Aproximación de 3er. orden
0	3, 5000	3, 5000
0, 2	1, 0708	1, 0710
0, 4	0, 3275	0, 3302
0, 6	0, 1002	0, 1078
0, 8	0, 0306	0, 0442
1, 0	0, 0093	0, 0278

BIBLIOGRAFIA

[1] SCHAEFER, M. B.: Some aspects of the dinamics of population important to the management of the commercial marine fisheries, Bull. Inter-Amer. Trop. Tuna Comm., Vol. 1, pp 27-56, 1954.

[2] PELLA, J. J.; TOMLINSON, P. K.: A generalizad stock production model, Bull. Inter-Amer. Tro. Tuna Comm., Vol. 14, pp. 421-496, 1969.

[3] FOX, W. W.: An exponential surplus yield model for optimizing exploited fish population, Trans. Amer. Fish. Soc., Vol. 99, pp. 80-88, 1970.

[4] SILLIMAN, R. P.: Advantages and limitations of simple fishery models in light of laboratory experiments, J. Fish. Res. Board Can., Vol. 28, pp. 1211-1214, 1971.

[5] WRIGHT, E. M.: On a sequence defined by a non-linear recurrence formula, J. London Mathematical Society, Vol. 20, pp. 68-73, 1945.

[6] WRIGHT, E. M.: A non linear difference-differential equation, J. Reine Angew. Math. Vo. 194, pp. 66-87, 1955.

[7] KAKUTANI, S.; MARKUS, L.: On the non-linear difference-differential equation y'(t) = (A − B y (t −   )) y(t), Contrb. Theory Nonlinear Oscillations, Vol. 4, pp. 1-18, 1958.

[8] JONES, G. S.: The existence of periodic Solutions of f'(x) = −   f(x − 1) (1 + F(x)), J. Math. Anal. Appl. Vol. 5, pp. 435-450, 1962.

[9] KAPLAN, J. L.; YORKE, J. A.: On the stability of a periodic solution of a differential delay equation, SIAM J. Math. Anal., Vol. 6, pp. 268-282, 1975.

[10] CLARK, C. W.: "A delayed-recruitment Model of population dynamics with an application to Baleen Whale Populations", J. Math. Biology. Vol. 3, pp. 381-391, 1976.

[11] WALTER, G. G.: "Delay-differential equation models for fisheries", J. Fish. Res. Board Can., Vol. 30, pp. 939-945, 1973.

[12] D'ATTELLIS, C. E.; GREGORIO, C. G.: "Un modelo estocástico de pesquerías", Rev. INIDEP, Vol. 1, 1980.

[13] D'ATTELLIS, C. E.; GREGORIO, C. G.: "On parameter identification in Schaefer model of fisheries", por aparecer.

[14] GIRIJASHANKAR, P. V.; SRIKANTIAH, G.; PAI, M. A.: "Dynamic simulation of a boiling water nuclear reactor", Annals of Nuclear Energy, Vol. 3, pp. 133-145, 1976.

[15] PAYNTER, H. M.: "The Paynter delay line", Lightning Empiricist, Vol. 11, pp. 10-11, 1963.

[16] ROBINSON, W. R.; SOUDACK, A. C.: "A method for the identification of time delays in linear systems", IEEE Trans. AC-15, N° 1, pp. 97-101, 1970.

[17] *SCHNUTE, J.*: Improved estimates from the Schaeter production model: theoretical considerations, J. Fish. Res. Board. Can, Vol. 34, N° 5, pp 583-603, 1977.